**Université de Versailles - Saint Quentin** **Année 2018/2019**
**M1 Théorie de Galois** **Maria Chlouveraki**

## Corps de décomposition - TD 4

Sauf si c'est précisé autrement, tous les polynômes sont considérés dans $\mathbb{Q}[x]$.

**Rappel :** $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ est irréductible si et seulement $f(x+1) \in \mathbb{Q}[x]$ est irréductible.

**1.** En utilisant le fait que $e^{2\pi i/9} = \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) i$, déterminer le polynôme minimal de $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$. Montrer que $[\mathbb{Q}(\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)) : \mathbb{Q}] = 3$.

**2.** Décrire le corps de décomposition du polynôme $(x^2 - 5)(x^2 + 1)$.

**3.** Montrer que le corps de décomposition $E$ d'un polynôme de degré 2 dans $\mathbb{Q}[x]$ est une extension simple de $\mathbb{Q}$. Déterminer $[E : \mathbb{Q}]$.

**4.** Décrire le corps de décomposition du polynôme $x^4 - 2$.

**5.** Décrire le corps de décomposition du polynôme $x^3 - 1$.

**6.** Décrire le corps de décomposition du polynôme $f_m(x) = x^3 - m$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

**7.** Soit $E$ le corps de décomposition d'un polynôme $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de degré 3. Si $[E : \mathbb{Q}] = 3$, montrer que toutes les racines du polynôme sont dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**8.** Décrire le corps de décomposition du polynôme $x^4 - 2x^2 - 5$.

**9.** Soit $f(x)$ le polynôme minimal de $\alpha := \sqrt{3 + \sqrt{2}}$. Montrer que le corps de décomposition de $f(x)$ est $\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{7})$.

**10.** Décrire le corps de décomposition du polynôme $x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$.